/ /

المحاضرة الثامنة 22/6/2020

خواص تحويلات لابلاس

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

$$L[f(x)] = F(s)$$

$$L[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

تابع في خواص التحويلات

③ خاصة المشتق

إذا كان $L[f(x)] = F(s)$ فإن

$$L[f'(x)] = s\, L[f(x)] - f(0)$$

مثال: إذا علمت أن $L[\sin 2x] = \dfrac{2}{s^2+4}$

فأوجد $L[\cos 2x]$ باستخدام خاصة المشتق

الحل:

$$L[\underbrace{\sin 2x}^{f(x)}] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L[f'] = L[+2\cos 2x] \overset{\text{خاصة المشتق}}{=} s\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \sin 2(0)$$

$$2L[\cos 2x] = \frac{2s}{s^2+4} - 0$$

$$\boxed{L[\cos 2x] = \frac{s}{s^2+4}}$$

مثال (وظيفة) إذا علمت أن $L[\cos 3x] = \dfrac{s}{s^2+9}$

فأوجد باستخدام خاصة المشتق $L[\sin 3x]$

تدرس هذه الخاصية

خاصية الانتقال الأول.

4

إذا كان $L[f(x)] = F(s)$ عندها

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

قانون

مثال (1): $L[e^{4x}]$

$$L[e^{4x}] = L[e^{4x} \cdot 1]$$

$$\boxed{f(x) = 1}$$

$$L[1] = L[x^0] = \frac{1}{s}$$ حسب المبرهنة

عندها حسب خاصية الانتقال الأول

$$L[e^{4x} \cdot 1] = \frac{1}{s-4}$$

مثال (2): $L[x e^{2x}]$

$$f(x) = x$$

$$L[x e^{2x}] = \frac{1}{(s-2)^2}$$

خاصية الانتقال الأول

$$f(x) = x \quad , \quad L[f(x)] = L[x] = \frac{1}{s^2}$$

وظيفة: $L[x^2 e^{-5x}]$

تذكرة:

$$ch\, ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

$$sh\, ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

مثال: أوجد $L[2ch3x - 19]$

وظيفة: $L[2sh3x - 13]$

الحل: $L[2ch3x-19] \underset{\text{بالخطية}}{=} 2L[ch3x] - 19L[1]$ —— (*)

نحسب $L[1]$

$$L[1] = L[x^0] = \frac{1}{s}$$

$$L[ch3x] = L\left[\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}L[e^{3x}] + \frac{1}{2}L[e^{-3x}]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$ خاصية الانتقال (مرتين)

نعوض في (*) فنجد المطلوب:

حيث $f(x)=1$ و $L[1]=\frac{1}{s}$

$$L[2ch3x-19] = 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}\right] - 19\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \left[\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+3}\right] - \frac{19}{s}$$

$\boxed{5}$ خاصية الضرب بـ x :

إذا كان $L[f(x)] = F(s)$ عندها

$$L[x f(x)] = -(F(s))' = -\frac{dF(s)}{ds}$$

مثال: أوجد

$$L[xe^{2x}]$$

حسب خاصية الضرب بـ x

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow L[e^{2x}] = L[e^{2x}\cdot 1] = \frac{1}{s-2}$$

استنادا إلى $L[1] = \frac{1}{s}$ و $f(x) = 1$

وبالتالي:

$$L[xe^{2x}] = -\left(\frac{1}{s-2}\right)'$$

$$L[xe^{2x}] = -\left(\frac{1}{s-2}\right)' = -\left(\frac{-1}{(s-2)^2}\right) = +\frac{1}{(s-2)^2}$$

/ /

6. خاصية الضرب بـ x^n (حيث $n \geq 1$)

إذا كان $L[f(x)] = F(s)$ فإن

$$\boxed{L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}}$$

مثال

طريقة أولى

Ex: $L[x^2 e^{3x}] = \frac{2}{(s-3)^3}$

انتقال أول

$f(x) = x^2$

$L[x^2] = \frac{2}{s^3}$

طريقة ثانية

$L[x^2 e^{3x}]$

باستخدام خاصية الضرب بـ x^n

$f(x) = e^{3x} \Rightarrow L[e^{3x}] = L[e^{3x} \cdot 1] = \frac{1}{s-3}$

$$\boxed{L[1] = \frac{1}{s} \text{ و } f(x) = 1 \quad \text{انتقال أول و}}$$

تذكر:

$((g(x))^n)' = n\,(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

$L[x^2 e^{3x}] = (-1)^2 \left(\frac{1}{s-3}\right)''$

$= + \left(\frac{-1}{(s-3)^2}\right)'$

$= \left(\frac{+2(s-3)'}{(s-3)^{3}}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$

The End.